

EGZAMIN Z LOGIKI I TEORII MNOGOŚCI

Imię i nazwisko., Grupa.

Zadanie 1. Niech $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ oznaczać zdania o wartościach logicznych: $w(\alpha) = 0, w(\beta) = 1, w(\gamma) = 0, w(\delta) = 1$. Wtedy

(1) $w((\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma) = 1$,

(2) $w((\alpha \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow (\gamma \Leftrightarrow \delta)) = 1$.

(4*) $w((\sim \alpha) \wedge \beta \wedge (\sim \gamma) \wedge \delta) = 0$.

4*:

Zadanie 2.

(1) Formuła rachunku zdań (FRZ) $(\sim (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow (\sim (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha)$ jest tautologią.

(2) $\text{FRZ } \sim ((\sim \alpha) \wedge (\sim \beta)) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta)$ jest tautologią.

(4*) Załóżmy, że zdanie złożone $(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$ jest prawdziwe, wtedy prawdziwe jest także zdanie p .

4*:

Zadanie 3. Dla każdego zbioru X i funkcji zdaniowych $\varphi(x), \tau(x)$ następujące zdanie jest prawdziwe

(1) $(\bigwedge_{x \in X} (\varphi(x) \Rightarrow \tau(x))) \Rightarrow \bigvee_{u \in X} \tau(u)$,

(2) $(\bigvee_{x \in X} \varphi(x) \wedge \bigvee_{x \in X} \psi(x)) \Rightarrow \bigvee_{x \in X} (\varphi(x) \wedge \psi(x))$,

(4) $(\sim \bigvee_{x \in X} \varphi(x)) \Rightarrow \bigwedge_{x \in X} \sim \varphi(x)$.

Zadanie 4.

(1*) Jeśli $A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, to $B \subseteq A$.

(2) Jeśli $A = \{4, 2\}$ i $a = \{0, 2, 4, \{4, 2\}\}$, to $A \in a$ oraz $A \subseteq a$.

(4) Jeśli $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$, $B = \{\{1, 2\}\}$, to $A \cap B = \{1, 2\}$.

1*:

Zadanie 5.

- (1) Zbiory $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 25\}$ oraz $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 5\}$ są równe.
- (2) Dla dowolnych zbiorów A, B, X zachodzi równość $X \setminus (A \cup (X \setminus B)) = (X \setminus A) \cap B$.
- (4*) Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi równość $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cap (A \setminus C))$.

4*:

Zadanie 6.

- (1) Jeśli $A \subseteq B$, to $A \subseteq 2^B$.
- (2*) $2^{X \cup Y} \supseteq 2^X \cup 2^Y$.
- (4) Jeśli $X = \{\{a, b, c\}\}$, to $2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

2*:

Zadanie 7.

- (1) Istnieje nieskończony ciąg zdań $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n, \dots$, że T_1 jest zdaniem prawdziwym oraz dla każdej liczby naturalnej $k \geq 1$ zachodzi $T_k \Rightarrow (T_{k+1} \vee T_{k+2} \vee T_{k+3})$, który zawiera jedynie skończenie wiele zdań prawdziwych.
- (2) Jeśli o zdaniach $T_2, T_3, \dots, T_n, \dots$ wiemy, że T_p jest prawdziwe dla każdej liczby pierwszej p oraz dla każdej pary liczb naturalnych $x, y \geq 2$ stąd, że T_x i T_y są prawdziwe wynika, że i T_{xy} jest zdaniem prawdziwym, to wszystkie te zdania są prawdziwe.
- (4*) Istnieje nieskończenie wiele zbiorów $A \subseteq \mathbb{N}$ o tej własności, że

$$\bigwedge_k (k \in A \Rightarrow k + 1 \in A).$$

4*:

Zadanie 8.

- (1*) Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$
- (2) Liczba wszystkich funkcji różnowartościowych ze zbioru 4-elementowego w 5-elementowy jest równa $5!$.
- (4) Jeśli $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$ oraz $g \circ f$ jest iniekcją, to f i g są iniekcjami.

1*:

Zadanie 9.

- (1*) Relacja $\{(\heartsuit, \circ), (\S, \circ)(\spadesuit, \diamond)\}$ jest funkcją.
- (2) Relacja $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1, y \geq 0\}$ jest funkcją.
- (4) Niech $x \in (0, +\infty)$. Jeśli $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ oraz $g(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$, to $g \circ f(x) = 2 + \frac{1}{x}$.

1*:

Zadanie 10.

- (1*) $2 \in \bigcup_{0 < k \in \mathbb{N}} \left(k + \frac{1}{k}, k + \frac{2}{k}\right)$. (Napis (a, b) oznacza tutaj przedział.)
- (2) Jeśli $\mathcal{F} = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$, to $\bigcup \mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$.
- (4) Jeśli dla każdego wskaźnika $t \in T$ istnieją wskaźniki $r, s \in T$, że $B_r \subseteq A_t \subseteq B_s$, to $\bigcup_{t \in T} B_t = \bigcup_{t \in T} A_t$.

1*:

Zadanie 11. Relacja $\rho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$ jest:

- (1) jest antysymetryczna;
- (2*) jest przechodnia;
- (4) jest zwrotna.

2*:

Zadanie 12.

- (1) Relacja $\sim$ na $\mathbb{R}$ określona zależnością $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ jest relacją równoważności.

Jeśli $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{2, 5\}$, $C = \{1, 3\}$, $D = \{5, 6, 9\}$, to

- (2) $(A \times B) \cap (C \times D) = \{1, 3\} \times \{5\}$,
- (4) $(A \times B) \cup (C \times D) = \{1, 3, 4\} \times \{2, 5, 6, 9\}$.

Zadanie 13.

- (1) Dla każdej funkcji $f: X \rightarrow Y$ i podzbioru $A \subseteq Y$ zachodzi wzór $f[f^{-1}[A]] = A$.
- (2) Nie istnieje funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdej liczby $y \in \mathbb{R}$, przeciwobraz $f^{-1}(y)$ zawiera nieskończenie wiele elementów.
- (4*) Jeśli $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, a), (b, c), (d, 7)\}$ oraz $A = \{2, a, c, 7\}$, to $f^{-1}[A] = B$ gdzie $B = \{1, 3, 5, b\}$.

4*:

Zadanie 14.

- (1*) Moce zbiorów $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ są różne.
- (2) Każdy zbiór nieskończony zawiera zbiór równoliczny z $\mathbb{Q}$.
- (4) Zbiór wszystkich liczb niewymiernych jest przeliczalny.

1*:

Zadanie 15.

- (1*) Nie ma zbiorów większej mocy niż mocy continuum.
- (2) Zbiory $[0, 1]$ i $\mathbb{R}$ nie są równoliczne.
- (4) Zbiór $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ jest równoliczny z $\mathbb{R}$.

1*:

Zadanie 16. Dane są dwa odwzorowania $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow A$.

- (1) Jeśli oba są surjekcjami, to A i B muszą być równoliczne.
- (2) Jeśli f jest iniekcją, zaś g – surjekcją, to A i B są równoliczne.
- (4) Jeśli oba są iniekcjami, to A i B są równoliczne.

Zadanie 17.

- (1*) Zbiór liczb niewymiernych jest przeliczalny.
- (2) Hipoteza continuum głosi, że nie istnieje zbiór największej mocy.
- (4) Zbiór wszystkich liczb zespolonych ma moc continuum.

1*

[illegible]

*

[illegible]